Exercices corrigés
Probabilités conditionnelles

Jean-Luc EVENO

6 avril 2006

1 Exercice

Un lot contient 40 transistors
- **5 qui sont totalement défectueux (c'est à dire qui défaillent immédiatement)**
- **10 partiellement défectueux (c'est à dire qui défaillent au bout d'une certaine durée de vie)**
- **25 transistors acceptables**

On choisit, au hasard, dans le lot, un transistor, et on le met en service. S'il ne défaille pas tout de suite, quelle est la probabilité pour qu'il soit acceptable ?

Résolution

Soit D l'ensemble des transistors défectueux, E celui des transistors partiellement défectueux, et A, l'ensemble des trnsistors acceptables. Ce que nous recherchons, c'est $\mathbf{P}\left(A/\overline{D}\right)$; or,

$$\mathbf{P}\left(A/\overline{D}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(A \cap \overline{D}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{D}\right)}$$

Or, comme il y a équiprobabilité pour les tirages, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(A/\overline{D}\right) = \frac{\text{card}\left(A \cap \overline{D}\right)}{\text{card}\left(\overline{D}\right)} = \frac{\text{card}\left(A \cap (A \cup E)\right)}{\text{card}\left(A \cup E\right)} = \frac{\text{card}\left(A\right)}{\text{card}\left(A \cup E\right)} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

2 Exercice

2.1

Une compagnie d'assurance pense que la population peut être divisée en deux catégories : les accidentophiles et les autres. Les "statistiques" montrent que, pendant une période d'une année, les accidentophiles ont un accident avec une probabilité de 0,4, alors que pour les autres, elle est à O,2. Si on suppose que 30% des personnes sont accidentophiles, quelle est la probabilité pour qu'une personne nouvelle se présentant à l'assurance ait un accident dans l'année de la signature du contrat ?

Résolution

On appelle A l'ensemble des accidentophiles, et Z l'événement "avoir un accident". Si nous réécrivons les données du problème, nous avons :
- $\mathbf{P}(A) = 0,3$
- $\mathbf{P}(Z/A) = 0,4$
- $\mathbf{P}\left(Z/\overline{A}\right) = 0,2$

L'énoncé nous demande donc $\mathbf{P}(Z)$; or, $Z = Z \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (Z \cap A) \cup \left(Z \cap \overline{A}\right)$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}(Z) = \mathbf{P}(Z \cap A) + \mathbf{P}\left(Z \cap \overline{A}\right) = \mathbf{P}(Z/A) \times \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(Z/\overline{A}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 0,4 \times 0,3 + 0,2 \times 0,7 = 0,12 + 0,14 = 0,26$$

2.2

On suppose maintenant qu'un nouveau client de l'assurance a un accident lors de sa première année de contrat ; quelle est la probabilité pour que ce client soit accidentophile ?

Résolution

Il faut que nous calculions, à ce moment là, $\mathbf{P}(A/Z)$; or,

$$\mathbf{P}(A/Z) = \frac{\mathbf{P}(A \cap Z)}{\mathbf{P}(Z)} = \frac{\mathbf{P}(Z/A) \times \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(Z)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,26} = \frac{6}{13}$$

3 Exercice

Dans un questionnaire à choix multiples, de deux choses l'une : soit un étudiant connaît la réponse à la question, soit il y répond au hasard. Soit p la probabilité pour qu'il connaisse la réponse à la question et $1-p$ la probabilité pour qu'il y réponde au hasard. On suppose qu'un étudiant qui répond au hasard aux questions donnera une réponse correcte avec la probabilité $\frac{1}{m}$, où m est le nombre d'alternatives à chaque question. Quelle est la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à la question, sachant qu'il y a répondu correctement ?

Résolution

Soit E[1] l'événement "L'étudiant connaît la réponse à la question", et C l'événement la réponse est correcte. D'après l'énoncé, nous avons :
- $\mathbf{P}(E) = p$
- $\mathbf{P}\left(C/\overline{E}\right) = \frac{1}{m}$

La question consiste donc à calculer $\mathbf{P}(E/C)$. Or $\mathbf{P}(E/C) = \frac{\mathbf{P}(C \cap E)}{\mathbf{P}(C)}$.
Comme $\mathbf{P}(C \cap E) = \mathbf{P}(C/E) \times \mathbf{P}(E) = 1 \times p = p$, nous avons : $\mathbf{P}(E/C) = \frac{p}{\mathbf{P}(C)}$
Il faut maintenant calculer $\mathbf{P}(C)$ Or,$C = C \cap \left(E \cup \overline{E}\right) = (C \cap E) \cup \left(C \cap \overline{E}\right)$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C \cap E) + \mathbf{P}\left(C \cap \overline{E}\right) = \mathbf{P}(C/E) \times \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}\left(C/\overline{E}\right)\mathbf{P}\left(\overline{E}\right) = 1 \times p + \frac{1}{m} \times (1-p) = p + \frac{1-p}{m}$$

D'où : $\boxed{\mathbf{P}(E/C) = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{1 + p(m-1)}}$

4 Exercice

Un système électrique est composé de n composants séparés et est dit fonctionner "en parallèle", s'il fonctionne quand au moins un des composants fonctionne. Dans un tel système, si chaque composant i fonctionne indépendamment des autres avec la probabilité p_i, quelle est la probabilité pour que le système fonctionne ?

Résolution

Soit C_i, l'événement "Le composant n°i fonctionne", nous avons $\mathbf{P}(C_i) = p_i$. Soit Soit S, l'événement "Le système fonctionne", nous avons alors $S = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

En utilisant l'événement contraire, beaucoup plus manipulable, nous avons : $\overline{S} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} C_i}$, ce qui donne,

[1] E comme Exploit ! !

avec les lois de De Morgan : $\overline{S} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{C_i}$. D'où, $\mathbf{P}\left(\overline{S}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{C_i}\right)$; de l'indépendance, nous tirons $\mathbf{P}\left(\overline{S}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{C_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(1-p_i\right)$ D'où $\mathbf{P}\left(S\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(1-p_i\right)$