

Exercices corrigés

25 août 2006

Exercice 1

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, P\}$ un espace probabilisé et B et C deux ensembles tels que $P(B \cap C) > 0$

1. **Montrer que $P(B) > 0$ et $P(C) > 0$**

La réponse est évidente : comme $B \cap C \subset B$, nous avons $0 < P(B \cap C) \leq P(B)$, d'où le résultat ; on montre de la même manière que $P(C) > 0$

2. **Démontrer que $P(A/B \cap C) = \frac{P(A \cap B/C)}{P(B/C)}$**

Il suffit de reprendre les définitions et de réécrire !

$$\begin{aligned} P(A/B \cap C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \\ &= \frac{P(A \cap B/C) P(C)}{P(B/C) P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B/C)}{P(B/C)} \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 2

Demain, c'est l'anniversaire de Victor

Il y a une chance sur deux pour que sa marraine lui envoie un cadeau, et deux chances sur trois pour que sa grand mère en fasse autant. Il y a une chance sur trois pour que toutes les deux y pensent à la fois.

1. **Quelle est la probabilité pour qu'aucune des deux n'y pense ?**

Soit M l'événement : $M = \{\text{La marraine lui envoie un cadeau}\}$,
et G , l'événement $G = \{\text{La grand-mère lui envoie un cadeau}\}$

Nous avons : $P(M) = \frac{1}{2}$, $P(G) = \frac{2}{3}$ et $P(M \cap G) = \frac{1}{3}$. L'événement « Aucune des deux n'y pense » est donné par $\overline{M \cap G}$; or, $\overline{M \cap G} = \overline{M \cup G}$ et nous avons alors $P(\overline{M \cap G}) = P(\overline{M \cup G}) = 1 - P(M \cup G)$ Or, $P(M \cup G) = P(M) + P(G) - P(M \cap G) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

2. **Les événements « La marraine de Victor lui envoie un cadeau » et « La grand-mère de Victor lui envoie un cadeau » sont-ils indépendants ?**

Ces événements sont indépendants si et seulement si $P(M \cap G) = P(M) \times P(G)$; ce qui est le cas ici ; les événements sont donc indépendants.

3. **Victor a reçu un cadeau de sa grand mère. Quelle est la probabilité pour que sa marraine y pense également ?**

Il faut donc calculer $P(M/G)$ comme M et G sont deux événements indépendants, $P(M/G) = P(M)$

Exercice 3

Une machine remplit de manière automatique des sachets en mélangeant 2 produits A et B .

À chaque remplissage, pour le produit A , la machine introduit 50 grammes avec la probabilité 0,8 et 51 grammes avec la probabilité 0,2, et, indépendamment pour le produit B , elle introduit 50 grammes avec la probabilité 0,6 et 51 grammes avec la probabilité 0,4

1. X est la variable aléatoire réelle qui désigne les masses possibles d'un sachet. Quelles sont les valeurs prises par X ? Donner la loi de probabilité de X .

On appelle X_A la v.a.r. qui correspond aux valeurs prises par le produit A dans chaque sachet, et de même X_B pour le produit B . La masse totale d'un sachet est donc donnée par $X = X_A + X_B$. Nous avons :

$$\begin{aligned}X_A(\Omega) &= \{50, 51\} \\X_B(\Omega) &= \{50, 51\} \\X(\Omega) &= \{100, 101, 102\} \\P(\{X_A = 50\}) &= 0,8 \\P(\{X_A = 51\}) &= 0,2 \\P(\{X_B = 50\}) &= 0,6 \\P(\{X_B = 51\}) &= 0,4\end{aligned}$$

D'où on tire la loi de X :

- L'événement $\{X = 100\}$ est donné par : $\{X_A = 50, X_B = 50\}$, et donc

$$\begin{aligned}P(\{X = 100\}) &= P(\{X_A = 50, X_B = 50\}) \\&= P(\{X_A = 50\}) \times P(\{X_B = 50\})\end{aligned}$$

car les v.a.r. X_A et X_B sont indépendantes. Donc $P(\{X = 100\}) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$

- De la même manière, l'événement $\{X = 101\}$ est donné par : $\{X_A = 50, X_B = 51\} \cup \{X_A = 51, X_B = 50\}$, et donc

$$\begin{aligned}P(\{X = 101\}) &= P(\{X_A = 50, X_B = 51\}) + P(\{X_A = 51, X_B = 50\}) \\&= P(\{X_A = 51\}) \times P(\{X_B = 50\}) + P(\{X_A = 50\}) \times P(\{X_B = 51\})\end{aligned}$$

car les v.a.r. X_A et X_B sont indépendantes. Donc $P(\{X = 101\}) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,6 = 0,44$

- L'événement $\{X = 102\}$ est donné par : $\{X_A = 51, X_B = 51\}$, et donc

$$\begin{aligned}P(\{X = 102\}) &= P(\{X_A = 51, X_B = 51\}) \\&= P(\{X_A = 51\}) \times P(\{X_B = 51\})\end{aligned}$$

car les v.a.r. X_A et X_B sont indépendantes. Donc $P(\{X = 102\}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

2. Quelle est la probabilité pour qu'un sachet contienne au plus 101 grammes?

L'événement « Un sachet contienne au plus 101 grammes » est l'événement $\{X \leq 101\}$, dont l'événement contraire est $\{X = 102\}$; on peut en conclure, tout de suite, que la probabilité pour qu'un sachet contienne au plus 101 grammes est 0,92

3. Calculez l'espérance mathématique de X .

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = 100 \times 0,48 + 101 \times 0,44 + 102 \times 0,08 = 100,6$$

4. Les sachets sont vendus par groupe de 2, la constitution des paires étant équiprobables. Donnez la probabilité pour qu'un groupe de sachets contienne 202 grammes.

Si X_1 donne le poids du premier sachet et X_2 le poids du second, X_1 , et X_2 suivent la même loi, celle de X ; le poids de chacune des paires est donnée par $P = X_1 + X_2$; ainsi l'événement $\{P = 202\} = \{X_1 = 101, X_2 = 101\} \cup \{X_1 = 100, X_2 = 102\} \cup \{X_1 = 102, X_2 = 100\}$, et donc $P(\{P = 202\}) = (P(\{X = 101\}))^2 + 2 \times P(\{X_1 = 102, X_2 = 100\}) = 0,064 + 2 \times 0,08 \times 0,48 = 0,1408$

Exercice 4

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère qu'à chaque naissance, l'ensemble des réalisations possibles (*l'espace fondamental*) est donné par : $\Omega = \{G, F\}$

- G est l'événement « Avoir un garçon »
- F est l'événement « Avoir une fille »
- Il y a autant de chances d'avoir une fille qu'un garçon

Pour la i -ème naissance, on construit la variable aléatoire réelle X_i , par :

$$\begin{aligned} X_i : \Omega &\longrightarrow \{0, 1\} \\ G &\longmapsto 1 \\ F &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Soit $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

1. **Que représente X ?**

X représente le nombre de garçons en n naissances. Chacune des X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$; ainsi, X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, et nous avons donc

$$P(\{X = k\}) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^k$$

2. **Dans cette question, $n = 3$**

- (a) **Déterminer la probabilité pour que, parmi ses 3 enfants, le couple ait « exactement 3 garçons »**

C'est très simple; il suffit, ici de calculer $P(\{X = 3\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_3^3 = \frac{1}{8}$

- (b) **Même question avec « exactement 2 garçons », « exactement 1 garçons », « exactement 0 garçons »**

C'est très simple!!

$$P(\{X = 0\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_0^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(\{X = 1\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_1^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 2\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_2^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_3^3 = \frac{1}{8}$$

- (c) **Construire la fonction de répartition de la variable X**

Appelons F_X la fonction de répartition de X , et rappelons cette définition : $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$

$$\text{Si } x < 0 \text{ alors } F_X(x) = 0$$

$$\text{Si } x \in [0, 1[\text{ alors } F_X(x) = P(\{X = 0\}) = \frac{1}{8}$$

$$\text{Si } x \in [1, 2[\text{ alors } F_X(x) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x \in [2, 3[\text{ alors } F_X(x) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) = \frac{7}{8}$$

$$\text{Si } x \in [3, +\infty[\text{ alors } F_X(x) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) + P(\{X = 3\}) = 1$$

3. **Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$**

C'est donc très simple; il suffit de trouver n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^n \leq \frac{1}{100}$, ou, ce qui est équivalent, tel

que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100}$; en passant au logarithme, nous trouvons $n \geq \frac{2}{\log_{10} 2} = 6,64$

Ainsi, si $n \geq 7$, alors la probabilité de ne pas avoir de garçon est strictement inférieure à $\frac{1}{100}$