Exercice corrigé sur les séries numériques

29 décembre 2008

1 Exercice

Dans cet exercice, nous devons utiliser la formule de Stirling. La formule de Stirling évalue le comportement de $n\,!$ au voisinage de $+\infty$.
Nous avons donc la formule suivante, dite de Stirling :

$$\boxed{n\,! \simeq \left(\sqrt{2\pi n}\right) n^n e^{-n}}$$

1. **En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent, au voisinage de $+\infty$ de C_{2n}^{n}**
   Dans un premier temps, il faut réécrire C_{2n}^{n} avec les factorielles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{2n}^{n} &= \frac{(2n)\,!}{(n\,!)^2} \\
&\simeq \frac{\left(\left(\sqrt{4\pi n}\right)(2n)^{2n}\,e^{-2n}\right)}{\left(\left(\sqrt{2\pi n}\right) n^n e^{-n}\right)^2} \\
&\simeq \frac{2\left(\left(\sqrt{\pi n}\right) 4^n n^{2n} e^{-2n}\right)}{2\left(\sqrt{\pi n}\right)^2 n^{2n} e^{-2n}} \\
&\simeq \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

   Donc,

$$\boxed{\mathrm{C}_{2n}^{n} \simeq \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}$$

2. **La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$ converge-t-elle ?**
   Il suffit de remarquer, maintenant, que $\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$; comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$ est donc divergente.

3. **La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\,\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$ converge-t-elle ?**
   La série à étudier est une série alternée. Nous allons utiliser le critère des séries alternées pour étudier la convergence de cette série.
   - D'une part $\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n} > 0$
   - Puis, comme $\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n} = 0$

– Etudions maintenant la croissance ou la décroissance de la suite $\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$ en étudiant le quotient des termes successifs.

$$\frac{\dfrac{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}{4^{n+1}}}{\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}} = \frac{1}{4} \times \frac{2\,(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

Cette suite est donc bien décroissante, et, par le critère des séries alternées est bien convergente.

2 Exercice

Dans cet exercice, on suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. **Donner la somme de** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$

   On sépare, dans la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, les termes de rang pair de ceux de rang impair en écrivant :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}$$

   Ce qui donne :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$$

   D'où nous tirons :

$$\frac{3}{4}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

   C'est à dire : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

2. **En déduire** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$

   La méthode utilisée est la même que celle présentée ci-dessus : nous séparons, dans la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, les termes de rang pair de ceux de rang impair en écrivant :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}$$

   Ce qui donne :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$$

   D'où nous tirons :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$$

   C'est à dire : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$