

Les séries numériques
Conditions nécessaires de convergence
Quelques exercices corrigés

Jean-Luc EVENO

30 janvier 2007

Rappel du cours : conditions nécessaires de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Ce résultat vaut surtout par sa contraposée :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ ne converge pas

Exercice 1

Etudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \cos \frac{1}{n}$

Il suffit de voir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{n} = 1$; donc, en vertu de la contraposée, la série $\sum_{n \geq 1} \cos \frac{1}{n}$ **n'est**

pas convergente

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 789}$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 789} = 1$; donc, en vertu de la contraposée, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 789}$ **n'est**

pas convergente

Exercice 2

Mais, ce n'est pas parce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ que la série $\sum u_n$ converge

Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

1. On va d'abord remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$ et que donc cette série est **peut-être convergente** ; ce critère n'est pas suffisant

2. Utilisons les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

Ecrivons les différemment :

(a) $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(1+k) - \ln k)$

(b) On peut dissocier ces sommes : $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\ln(1+k) - \sum_{k=1}^n \ln k \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln k \right) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$

3. Nous avons donc $S_n = \ln(n+1)$, et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, nous pouvons conclure que la série

$$\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ est divergente.}$$

Nous avons un nouvel exemple où le terme général tend vers zéro **et** la série est divergente

Exercice 3

Développement décimal

1. **Montrer que** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$

Il faut tout d'abord remarquer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$; la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{10}$; or, d'après le cours, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$, et donc $9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \times \frac{10}{9} = 10$

Mais, ce n'est pas fini, car nous avons, en fait : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$, ce qui montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} - 9 = 10 - 9 = 1$$

En fait, nous avons ici, une seconde écriture décimale de 1, car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 0,999999999 \dots 9999999999 \dots = 1$$

2. **À quoi est égal** $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$?

On recommence!!

$$0,009999999999999 \dots 999999999 \dots = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} - \frac{9}{10^1} - \frac{9}{10^2} = 1 - 0,9 - 0,09 = 0,01$$

Exercice 4

Montrer que $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ **converge**

1. Nous allons toujours étudier les sommes partielles $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k(k^2-4)}$; il nous faut commencer par décomposer en éléments simples l'expression $\frac{2k-1}{k(k^2-4)}$

Tous calculs faits, nous avons :

$$\frac{2k-1}{k(k^2-4)} = \frac{1}{4} \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \frac{1}{k+2} + \frac{3}{8} \frac{1}{k-2}$$

2. De telle sorte que $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{4} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{5}{8} \frac{1}{k+2} + \sum_{k=3}^n \frac{3}{8} \frac{1}{k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+2} + \frac{3}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2}$

Il nous faut, maintenant, réarranger les indices; ce qui nous donne :

$$S_n = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}$$

En prenant les termes communs, qui sont les termes d'indices 5 à $n - 2$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \\
 &\quad - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{\frac{5}{8}}{n-1} - \frac{\frac{5}{8}}{n} - \frac{\frac{5}{8}}{n+1} - \frac{\frac{5}{8}}{n+2} \\
 &\quad + \frac{\frac{3}{8}}{1} + \frac{\frac{3}{8}}{2} + \frac{\frac{3}{8}}{3} + \frac{\frac{3}{8}}{4} + \frac{3}{8} \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k}
 \end{aligned}$$

D'où on tire : $S_n = \frac{89}{96} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$

3. De l'expression ci-dessus, nous tirons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{89}{96}$, c'est à dire que la série $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$

converge, et que $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = -\frac{89}{96}$