

Corrigé des travaux dirigés

La notation \sum , le binôme de Newton et le raisonnement par récurrence

Jean-Luc Eveno

18 novembre 2004

1 Exercice

Écrire, en utilisant le symbole sigma (\sum) les expressions suivantes et essayer d'en donner une expression simple

1.1

$$S_1 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{10 \times 11}$$

Correction: L'écriture de cette expression peut être réalisée différemment :

$$S_1 = 1 + \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k \times (k+1)}$$

Or, $\frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ On peut donc écrire S_1 d'une autre manière, c'est à dire :

$$S_1 = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)$$

Ce qui nous donne, par simplifications successives : $S_1 = 1 + 1 - \frac{1}{11} = \frac{21}{11}$

Plus généralement, si nous écrivons $S_1 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$, ou, autre forme d'écriture

$$S_1 = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \times (k+1)}$$

Nous pouvons ré écrire S_1 , en tenant compte de l'égalité $\frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, c'est à dire :

$$S_1 = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \times (k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Ce qui donne, en supprimant les termes que nous retrouvons dans les deux sommes : $S_1 = 2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$.

Pour $n = 10$, on retrouve bien le résultat

1.2

$$S_2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$$

Correction: Il est assez facile de voir que $S_2 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10}$ S_2 est donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 ; d'où $S_2 = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2047$

2 Exercice (Février 2004)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la propriété $P(n)$ définie par :

$$P(n) : 2^n \geq (n+2)^2$$

1. Quelle est la valeur de vérité de $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$?

- (a) $2^0 = 1$ et $(0+2)^2 = 4$, donc $P(0)$ est faux
 - (b) $2^1 = 2$ et $(1+2)^2 = 9$, donc $P(1)$ est faux
 - (c) $2^2 = 4$ et $(2+2)^2 = 16$, donc $P(2)$ est faux
 - (d) $2^3 = 8$ et $(3+2)^2 = 25$, donc $P(3)$ est faux
 - (e) $2^4 = 16$ et $(4+2)^2 = 36$, donc $P(4)$ est faux
 - (f) $2^5 = 32$ et $(5+2)^2 = 49$, donc $P(5)$ est faux
 - (g) $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$, donc $P(6)$ est vraie
-

2. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 6) \Rightarrow (P(n) \text{ vraie})$

Vérification pour le premier terme Dans la question précédente, on vient de montrer que $P(6)$ est vraie

On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie

On démontre que $P(n+1)$ est vraie On démontre $P(n+1)$ en supposant que $P(n)$ est vraie.

Nous avons $2^{n+1} = 2^n \times 2 \geq (n+2)^2 \times 2$ d'après l'hypothèse de récurrence. Or $(n+2)^2 \times 2 = 2(n^2 + 4n + 4) = 2n^2 + 8n + 8 = n^2 + 6n + 9 + n^2 + 2n - 1 = (n+3)^2 + n^2 + 2n - 1$.

Comme $n^2 + 2n - 1 > 0$ si $n \geq 6$, nous avons $:(n+3)^2 + n^2 + 2n - 1 \geq (n+3)^2$, c'est à dire $2^{n+1} \geq ((n+1)+2)^2$

$P(n+1)$ est donc vrai.

3 Exercice

Démontrer par récurrence que

1. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Déjà corrigé dans le cours

2. $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Vérifions pour $n=0$ $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$

Supposons que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démontrons à l'ordre $n + 1$: Nous avons $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$. Et maintenant, ce n'est plus qu'une question de calcul $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$, et donc $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$; la factorisation de $(2n^2 + 7n + 6)$ est donnée par $(2n^2 + 7n + 6) = (n+2)(2n+3) = ((n+1)+1)(2(n+1)+1)$ et nous avons donc $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, c'est à dire que la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$

En déduire $\sum_{k=0}^n (7k+1)^2$

Il suffit de développer et de remplacer les expressions trouvées précédemment.

$$\sum_{k=0}^n (7k+1)^2 = 49 \sum_{k=0}^n k^2 + 14 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 49 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 14 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{6} (98n^2 + 91n + 6)$$

4 Exercice sur le binôme de Newton

4.1 Exercices corrigés

1. Rappeler la formule donnant $(a+b)^n$ et en déduire $\sum_{k=0}^n C_n^k$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$, $\sum_{k=0}^n k C_n^k$

(a) Pour $\sum_{k=0}^n C_n^k$, il suffit de faire dans $(a+b)^n$, $a = b = 1$, et nous avons $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

(b) Pour $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$, il suffit de faire dans $(a+b)^n$, $a = -b = 1$, et nous avons $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$

(c) Pour $\sum_{k=0}^n k C_n^k$, c'est un peu plus compliqué. Si nous considérons le polynôme $P_n(X) = (1+X)^n$;

nous avons : $P_n(X) = \sum_{k=0}^n C_n^k X^k$ et donc en dérivant, nous obtenons $P_n'(X) = n(1+X)^{n-1} =$

$\sum_{k=0}^n k C_n^k X^{k-1}$ il suffit de faire dans $P_n'(X)$, $X = 1$, et nous avons $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n2^{n-1}$,

2. En utilisant la formule du binôme pour $(k+1)^2$ et en sommant sur les valeurs de k de 1 à n , trouver l'expression de $\sum_{k=1}^n k$ en fonction de n

En fait, on développe : $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ et $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$

Sous forme de tableau, comment pouvons nous l'écrire ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } k = n \quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ \text{pour } k = n-1 \quad (n)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 \\ \text{pour } k = n-2 \quad (n-1)^2 = (n-2)^2 + 2(n-2) + 1 \\ \dots \\ \text{pour } k = 3 \quad (4)^2 = (3)^2 + 2(3) + 1 \\ \text{pour } k = 2 \quad (3)^2 = (2)^2 + 2(2) + 1 \\ \text{pour } k = 1 \quad (2)^2 = (1)^2 + 2(1) + 1 \\ \text{pour } k = 0 \quad (1)^2 = (0)^2 + 2(0) + 1 \end{array} \right.$$

En additionnant, on s'aperçoit que les termes intermédiaires se simplifient, et on obtient : $(n+1)^2 = 2 \sum_{k=1}^n k + (n+1)$, d'où nous tirons : $2 \sum_{k=1}^n k = 2 \left((n+1)^2 - (n+1) \right) = 2n(n+1)$

D'où $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

3. Par une méthode similaire, trouver $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$
-

Evidemment très facile. Donc, à faire seul.

4.2 Exercices pour aller plus loin

1. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^k C_n^k$
2. Calculer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} C_n^k$; $\sum_{k=1}^n kx^k C_n^k$
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n (k+1) C_n^k = (n+2) 2^{n-1}$
4. (a) Vérifier que $k^2 = k(k-1) + k$
 (b) En utilisant la dérivée seconde du polynôme $(1+X)^n$ écrite de 2 façons différentes, donner $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$
- (c) Calculer $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 C_n^k$